

Politechnika Świętokrzyska

Laboratorium

Cyfrowe przetwarzanie sygnałów

Ćwiczenie 6

Transformata cosinusowa.
Krótkookresowa transformata Fouriera.

Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest zapoznanie studentów z funkcjami pozwalającymi na realizację transformaty cosinusowej i krótkookresowej transformaty Fouriera dla sygnałów jedno i dwuwymiarowych.

dr inż. Robert Kazała

Dyskretna transformacja kosinusowa

Dyskretna transformacja kosinusowa, (DCT – ang. discrete cosine transform, czyli dyskretna transformacja cosinusowa) – jedna z najpopularniejszych blokowych transformacji danych. Jest szczególnie popularna w stratnej kompresji danych.

Zaletą stosowania transformaty DCT w kompresji jest to, że większość współczynników jest zwykle bliska 0 – po kwantyzacji wyzerują się, co redukuje liczbę bitów potrzebną do reprezentacji sygnału bez wnoszenia dużego błędu.

Przetwarzanie sygnałów wielowymiarowych wymaga zastosowania przekształcenia o odpowiedniej liczbie wymiarów. Ponieważ przekształcenie wielowymiarowe DCT jest separowalne, odpowiednie transformaty można uzyskać przez kolejne wykonanie jednowymiarowych przekształceń we wszystkich wymiarach.

DCT-I

$$X_k = \frac{1}{2}(x_0 + (-1)^k x_{N-1}) + \sum_{n=1}^{N-2} x_n \cos \left[\frac{\pi}{N-1} nk \right] \quad k = 0, \dots, N-1.$$

DCT-II

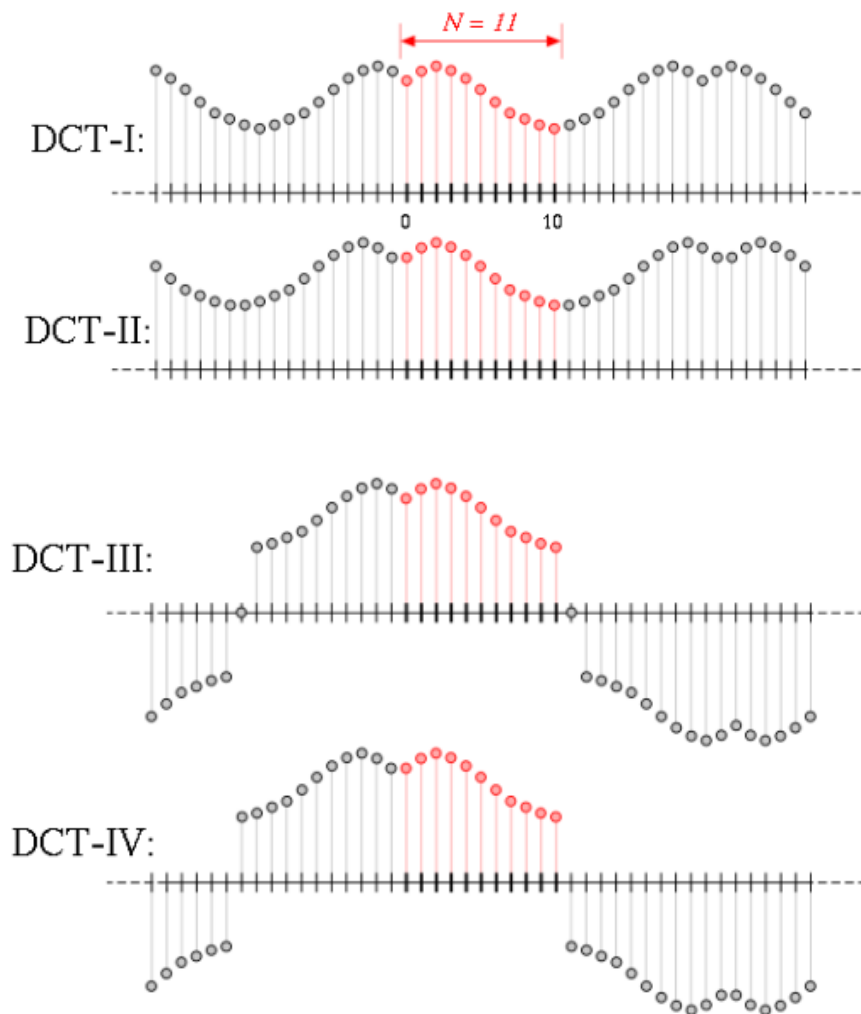
$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos \left[\frac{\pi}{N} \left(n + \frac{1}{2} \right) k \right] \quad k = 0, \dots, N-1.$$

DCT-III

$$X_k = \frac{1}{2}x_0 + \sum_{n=1}^{N-1} x_n \cos \left[\frac{\pi}{N} n \left(k + \frac{1}{2} \right) \right] \quad k = 0, \dots, N-1.$$

DCT-IV

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos \left[\frac{\pi}{N} \left(n + \frac{1}{2} \right) \left(k + \frac{1}{2} \right) \right] \quad k = 0, \dots, N-1.$$



Dwuwymiarowa DCT II

$$\begin{aligned}
 X_{k_1, k_2} &= \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \left(\sum_{n_2=0}^{N_2-1} x_{n_1, n_2} \cos \left[\frac{\pi}{N_2} \left(n_2 + \frac{1}{2} \right) k_2 \right] \right) \cos \left[\frac{\pi}{N_1} \left(n_1 + \frac{1}{2} \right) k_1 \right] \\
 &= \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x_{n_1, n_2} \cos \left[\frac{\pi}{N_1} \left(n_1 + \frac{1}{2} \right) k_1 \right] \cos \left[\frac{\pi}{N_2} \left(n_2 + \frac{1}{2} \right) k_2 \right].
 \end{aligned}$$

Transformata odwrotna IDCT

Przy zachowaniu odpowiednich współczynników normalizacji, transformatą odwrotną do DCT-I jest DCT-I pomnożona przez $2/(N-1)$.

DCT-IV jest DCT-IV pomnożona przez $2/N$.

DCT-II jest DCT-III pomnożona przez $2/N$ i odwrotnie.

Podobnie jak dla DFT, współczynnik normalizacji z przodu transformacji zależy od przyjętej konwencji i różni się pomiędzy różnymi definicjami.

Funkcje pakietu Scipy do wyznaczania transformaty cosinusowej

Funkcja wyliczająca Discrete Cosine Transform.

```
scipy.fftpack.dct(x, type=2, n=None, axis=-1, norm=None,
overwrite_x=0)
```

Parametry :

x : array_like Tablica wejściowa.

type : {1, 2, 3}, opcjonalny Typ DCT. Domyślnie 2.

n : int, opcjonalny Długość transformaty.

axis : int, opcjonalny Oś według której wyliczana jest transformata.

norm : {None, 'ortho'}, opcjonalny Tryb normalizacji. Domyślnie None.

overwrite_x : bool, opcjonalny Jeżeli True zawartość x może być zniszczona (domyślnie=False)

Zwracana wartość :

y : ndarray of real tablica wynikowa.

Funkcja wyliczająca Inverse Discrete Cosine Transform.

```
scipy.fftpack.idct(x, type=2, n=None, axis=-1, norm=None,
overwrite_x=0)
```

Parametry :

x : array_like Tablica wejściowa.

type : {1, 2, 3}, opcjonalny Typ DCT. Domyślnie 2.

n : int, opcjonalny Długość transformaty.

axis : int, opcjonalny Oś według której wyliczana jest transformata.

norm : {None, 'ortho'}, opcjonalny Tryb normalizacji. Domyślnie None.

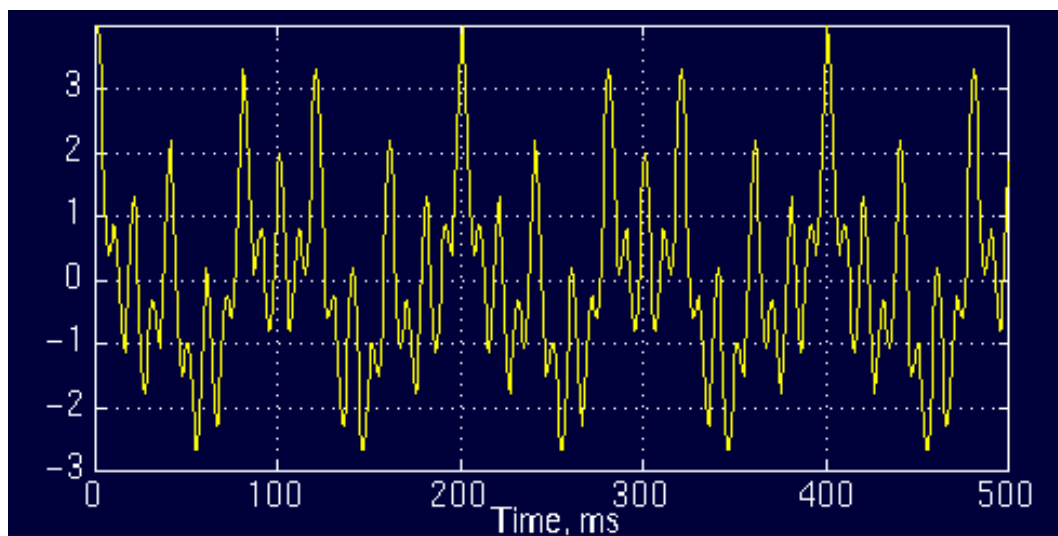
overwrite_x : bool, opcjonalny Jeżeli True zawartość x może być zniszczona (domyślnie=False)

Zwracana wartość :

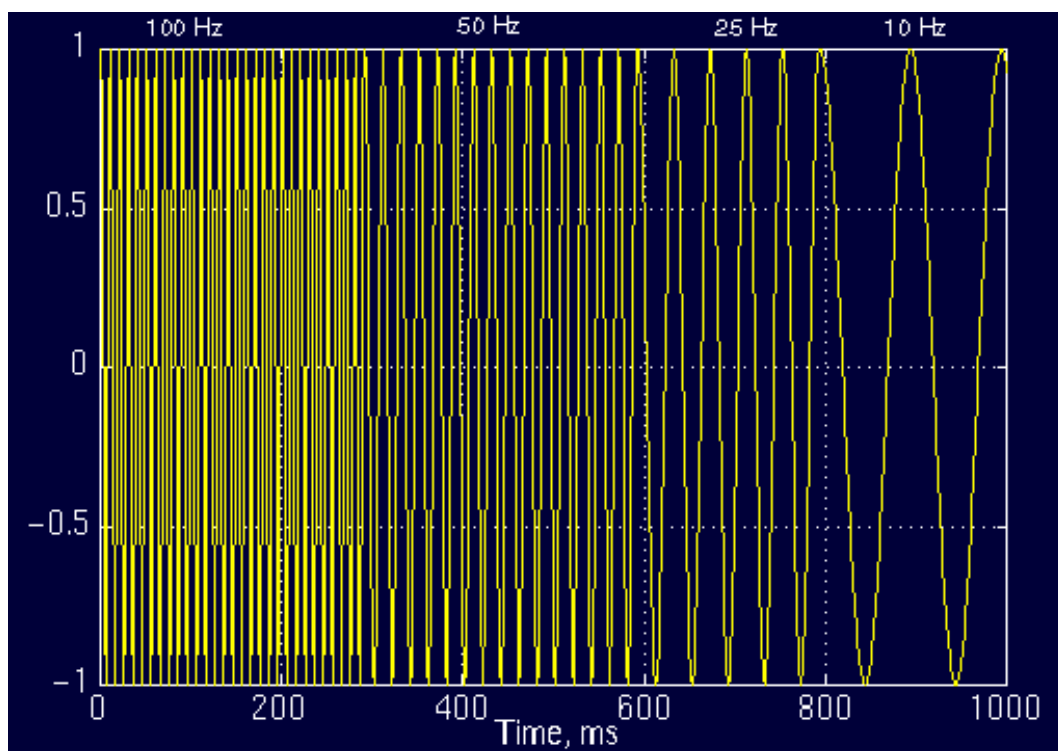
y : ndarray of real tablica wynikowa.

Sygnal stacjonarny

$$x(t) = \cos(2\pi \cdot 10t) + \cos(2\pi \cdot 25t) + \cos(2\pi \cdot 50t) + \cos(2\pi \cdot 100t)$$



Sygnal niestacjonarny



Analiza STFT - (Short-Time Fourier Transform)

STFT stanowi sposób kompromisu pomiędzy czasowym a częstotliwościowym przedstawieniem sygnału. Dostarcza pewnych informacji o tym kiedy i jakie częstotliwości wystąpiły w zdarzeniu dotyczącym badanego sygnału. Jednakże możemy uzyskać te informacje tylko z ograniczoną dokładnością i dokładność ta jest zdeterminowana przez rozmiar okna.



Literatura

R. G. Lyons: Wprowadzenie do cyfrowego przetwarzania sygnałów, WKiŁ, Warszawa 1999.

Zadania

1. Utworzyć własną funkcję realizującą prostą i odwrotną transformatę cosinusową metodą DCT II. Zaprezentować jej działanie na sygnałach testowych i wybranych liniach obrazu.
2. Dla sygnałów testowych i wybranych linii obrazu wykonać prostą oraz odwrotną transformatę cosinusową, dla różnych metod jej obliczania, wykorzystując funkcje z modułu `scipy`. Porównać uzyskane współczynniki.
3. Wyzerować współczynniki o małych wartościach dla transformat z zadania 2 i wykonać transformatę odwrotną. Porównać wyniki z wynikami z zadania 2.
4. Wygenerować przebieg stacjonarny i niestacjonarny z przykładu w instrukcji oraz własny. Wykonać transformatę Fouriera dla tych przebiegów i porównać otrzymane wyniki.
5. Napisać funkcję wykonującą STFT z parametrem określającym długość okna i nakładanie się okna. Zaprezentować jej działanie na przebiegach niestacjonarnych z zadania 4.
6. Dla wybranych sygnałów dźwiękowych: mowy, instrumentu klawiszowego oraz smyczkowego wykonać transformatę STFT. Zaprezentować i omówić uzyskane wyniki.