

POLITECHNIKA ŚWIĘTOKRZYSKA  
Wydział Elektrotechniki, Automatyki i Informatyki  
Katedra Elektrotechniki Przemysłowej i Automatyki  
Zakład Urządzeń i Systemów Automatyki

---

Cyfrowe Przetwarzanie Sygnałów

# Szybka transformacja Fouriera

Instrukcja laboratoryjna

Paweł Strączyński  
Robert Kazała

---

2019

# 1 Sygnał harmoniczny

Sygnał harmoniczny (sinusoidalny) to sygnał którego zmienność określa funkcja sinusoidalna zgodnie z zależnością:

$$y = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (1)$$

gdzie:

$A$  - amplituda sygnału,

$\omega$  - pulsacja sygnału ( $2\pi f$ ),

$\varphi$  - przesunięcie fazowe.

# 2 Transformacja Fouriera

Transformacja Fouriera służy do rozłożenia funkcji okresowej na szereg funkcji okresowych tak, że uzyskana transformata podaje w jaki sposób poszczególne częstotliwości składają się na funkcję pierwotną. Dla funkcji okresowej  $f(x)$  transformata Fouriera wyraża się zależnością

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-2\pi i x s} dx \quad (2)$$

zatem  $f(x)$  można przedstawić jako:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(s) \cdot e^{-2\pi i x s} ds \quad (3)$$

W dyskretnej postaci transformata Fouriera dla ciągu  $N$  elementowego jest definiowana jako:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot e^{-\frac{2\pi i}{N} nk} \quad (4)$$

Szybka transformacja Fouriera (*Fast Fourier Transform, FFT*) – to algorytm wyznaczania dyskretnej transformaty Fouriera DFT.

# 3 Funkcje pakietów Scipy oraz Numpy do wyznaczania FFT

W tabeli poniżej przedstawiono funkcje pakietu Numpy oraz Scipy realizujące dyskretną transformację Fouriera.

Tabela 3.1: Funkcje do realizacji transformaty Fouriera

<code>fft(x)</code>	dyskretna transformata Fouriera
<code>ifft(x)</code>	odwrotna dyskretna transformata Fouriera
<code>fft2(x)</code>	dyskretna dwuwymiarowa transformata Fouriera
<code>ifft2(x)</code>	odwrotna dwuwymiarowa dyskretna transformata Fouriera
<code>fftshift(x)</code>	przesunięcie składowej stałej do środka spektrum
<code>ifftshift(x)</code>	funkcja odwrotna do funkcji <code>fftshift(x)</code>
<code>fftfreq(x)</code>	wyznaczenie częstotliwości dla próbek transformaty

Przykład użycia funkcji przedstawiono poniżej.

Listing 3.1: Przykład generowania FFT

```

1 from pylab import *
2 t=arange(0,1,0.01) #generowanie przebiegu czasowego
3 f=1
4 y=5+2*sin(2*pi*f*t)+1*sin(2*pi*4*f*t+pi/8) #wygenerowanie przebiegu
5 figure(1)
6 clf()
7 subplot(2,1,1)
8 plot(t,y,'r')
9 grid('on')
10 F_y=fft(y) #wyznaczenie transformaty Fouriera
11 y_r=ifft(F_y)
12 subplot(2,1,2)
13 plot(t,y_r.real,'g--') #Wyznaczenie transformaty odwrotnej
14 grid('on')
15 figure(2)
16 subplot(3,1,1)
17 stem(absoloute(F_y),'-.') #Wykreslenie modulu wyznaczonej transformaty
18 grid('on')
19 n=F_y.size
20 dt=t[1]-t[0]
21 f=fftfreq(n,d=dt) #Wyznaczenie czestotliwosci dla probek
22 subplot(3,1,2)
23 stem(f,absoloute(F_y),'-.') #Wykreslenie modulu wyznaczonej transformaty
24 grid('on')
25 F_y_s=fftshift(F_y) #przesuniecie niskich czestoslivosci do srodka
26 subplot(3,1,3)
27 stem(absoloute(F_y_s),'-.') #Wykreslenie modulu wyznaczonej transformaty

```

```
28 grid('on')
29 show()
```

## 4 Zadania do wykonania

1. Utworzyć wykresy przedstawiające sygnały sinusoidalne o różnych częstotliwościach i fazach.
2. Uruchomić i przeanalizować kod zawarty w przykładzie znajdującym się w instrukcji
3. Napisać skrypt tworzący jednowymiarowy przebieg składający się z trzech składowych sinusoidalnych o różnych amplitudach i fazach oraz wyznaczyć transformatę, transformatę odwrotną, charakterystykę amplitudową, charakterystykę fazową. Zadanie wykonać dla różnych częstotliwości próbkowania.
4. Przebieg z zadania 3 uzupełnić zerami i wyznaczyć charakterystyki częstotliwościowe.
5. Wyznaczyć transformatę, transformatę odwrotną, charakterystykę amplitudową i fazową dla przebiegów
  - prostokątnego,
  - piłokształtnego,
  - trapezoidalnego,
  - sinusoidalnego z obcięzonymi wierzchołkami.
6. Dla wybranej linii z obrazu kraty oraz różnych linii z obrazu naturalnego, wyznaczyć reprezentację w dziedzinie częstotliwości oraz charakterystyki amplitudową i fazową, przeanalizować uzyskane wyniki.
7. Usunąć z transformat uzyskanych w zadaniu 6 wybrane częstotliwości i dokonać przekształcenia odwrotnego.
8. Na wybranych własnych obrazach testowych i naturalnych przedstawić przetwarzanie obrazów do dziedziny częstotliwości.