
Politechnika Świętokrzyska
Wydział Elektrotechniki, Automatyki i Informatyki
Katedra Elektrotechniki Przemysłowej i Automatyki
Zakład Urządzeń i Systemów Automatyki

Komputerowa symulacja układów dynamicznych

Simulink.

Metoda zmiennej pomocniczej i metoda
kanoniczna.

Instrukcja laboratoryjna
(wersja robocza)

2017

1. Metoda zmiennej pomocniczej

Metoda zmiennej pomocniczej umożliwia rozwiązywanie równań różniczkowych o postaci:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = b_mx^{(m)} + b_{m-1}x^{(m-1)} + \dots + b_1x' + b_0x \quad (1.1)$$

gdzie: $m < n$

Wprowadzając do równania zmienną pomocniczą z otrzymuje się równania w postaci:

$$z^{(n)} + a_{n-1}z^{(n-1)} + \dots + a_1z' + a_0z = x \quad (1.2)$$

$$y = b_mz^{(m)} + \dots + b_1z' + a_0z \quad (1.3)$$

gdzie:

x – wymuszenie,

y – rozwiązanie.

Przykład 1

Korzystając z metody zmiennej pomocniczej rozwiązać równanie różniczkowe:

$$y'' + y' + 5y = 2x' + 3x \quad (1.4)$$

przy zerowych warunkach początkowych.

Do równania 1.4 wprowadzono zmienną pomocniczą z oraz otrzymano w rezultacie:

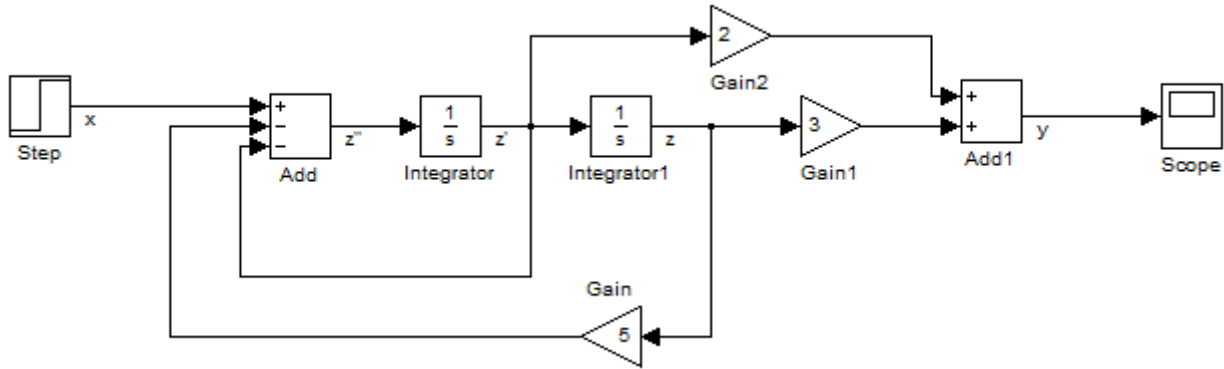
$$z'' + z' + 5z = x \quad (1.5)$$

$$y = 2z' + 3z \quad (1.6)$$

Równanie przekształcono do postaci:

$$z'' = x - z' - 5z \quad (1.7)$$

oraz rozwiązano je metodą ogólną.



Rysunek 1.1. Schemat w Simulinku rozwiązujący równanie różniczkowe z przykładu 1 metodą zmiennej pomocniczej.

2. Metoda kanoniczna

Metoda kanoniczna pozwala na rozwiązanie równania różniczkowego o postaci:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = b_mx^{(m)} + b_{m-1}x^{(m-1)} + \dots + b_1x' + b_0x \quad (2.1)$$

przy warunkach początkowych:

$$y(0) = y_0 \quad y^k(0) = y_{k0} \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots, n \quad (2.2)$$

$$x(0) = x_0 \quad x^j(0) = x_{j0} \quad \text{dla } j = 1, 2, \dots, n \quad (2.3)$$

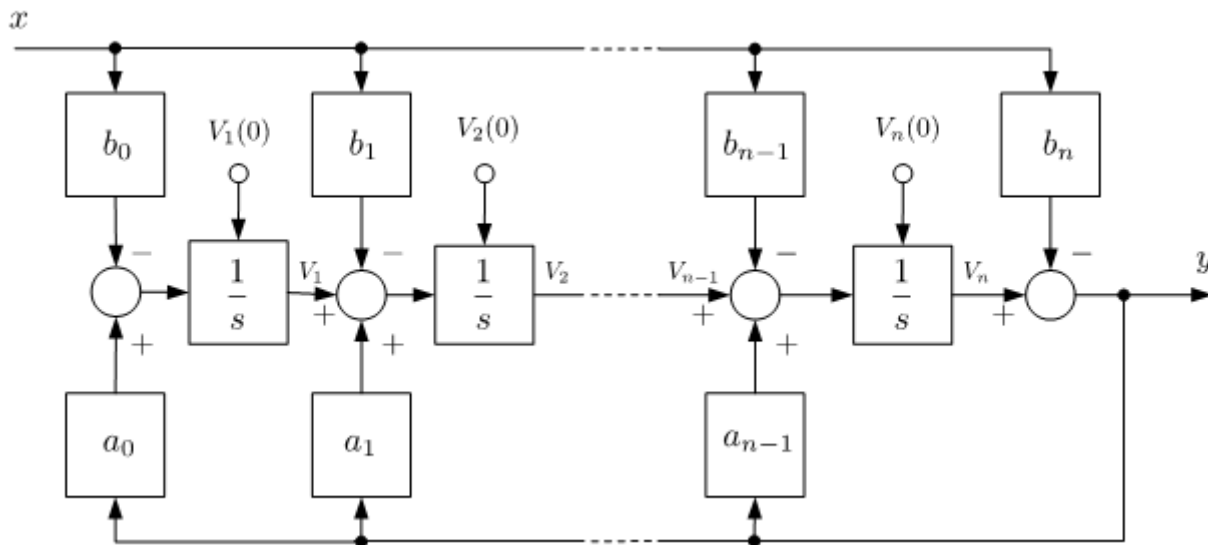
Rozwiązanie równania różniczkowego metodą kanoniczną sprowadza się do przedstawienia równania 2.1 w postaci:

$$b_0x - a_0y + \frac{d}{dt} \left(\underbrace{b_1x - a_1y + \dots + \frac{d}{dt} \left(\underbrace{b_{n-1}x - a_{n-1}y + \frac{d}{dt} \left(\underbrace{b_nx - y}_{V_n} \right)}_{V_{n-1}} \right)}_{V_1} \right) = 0 \quad (2.4)$$

Równanie 11 można zapisać jako układ równań różniczkowych pierwszego rzędu:

$$\left\{ \begin{array}{l} V_n = b_n x - y \\ \frac{d}{dt} V_n = V_{n-1} - b_{n-1} x + a_{n-1} y \\ \frac{d}{dt} V_{n-1} = V_{n-2} - b_{n-2} x + a_{n-2} y \\ \vdots \\ \frac{d}{dt} V_2 = V_1 - b_1 x + a_1 y \\ \frac{d}{dt} V_1 = -b_0 x + a_0 y \end{array} \right. \quad (2.5)$$

Na podstawie układu równań 12 otrzymuje się schemat operatorowy przedstawiony poniżej.



Rysunek 2. Metoda kanoniczna – schemat operatorowy

Warunki początkowe $V_i(0)$ wyznacza się na podstawie zależności:

$$V_i(0) = V_i^x + V_i^y \quad (2.6)$$

gdzie:

$$V_i^x = \sum_{j=i}^n b_j x^{(j-1)}(0) \quad (2.7)$$

$$V_i^y = \sum_{j=i}^n b_j y^{(j-1)}(0) \quad (2.8)$$

lub na podstawie tabel 2.1 oraz 2.2 (mnożąc opisy wierszy i kolumn i dodając wzdłuż linii).

Tabela 2.1 Warunki początkowe V_i^x

	$x(0)$	$\frac{d}{dt}x(0)$	$\frac{d^2}{dt}x(0)$	$\frac{d^3}{dt}x(0)$	
					b_n
V_n^x					b_{n-1}
V_{n-1}^x					b_{n-2}
V_{n-2}^x					b_{n-3}
V_{n-3}^x					

Tabela 2.2 Warunki początkowe V_i^y

	$y(0)$	$\frac{d}{dt}y(0)$	$\frac{d^2}{dt}y(0)$	$\frac{d^3}{dt}y(0)$	
					1
V_n^y					a_{n-1}
V_{n-1}^y					a_{n-2}
V_{n-2}^y					a_{n-3}
V_{n-3}^y					

Przykład 2

Korzystając z metody kanonicznej rozwiązać równanie różniczkowe:

$$y''' + 2,6y'' + 0,9y' + 1,3y = x'' + 1,7x' + 0,8x \quad (2.9)$$

przy warunkach początkowych:

$$y(0) = 0,3 \quad y'(0) = 0,2 \quad y''(0) = 0,4 \quad x(0) = 0,4 \quad x'(0) = 0,5 \quad (2.10)$$

Równanie 2.9 zostało przekształcone do postaci według równania 2.4:

$$0,8x - 1,3y + \frac{d}{dt} \left(\underbrace{1,7x - 0,9y + \frac{d}{dt} \left(\underbrace{x - 2,6y + \frac{d}{dt} \left(\underbrace{-y}_3 \right)}_{V_2} \right)}_{V_1} \right) = 0 \quad (2.11)$$

Równanie 2.11 zapisano w postaci układu równań różniczkowych pierwszego rzędu:

$$\begin{cases} V_3 = -y \\ \frac{d}{dt} V_3 = V_2 - x + 2,6y \\ \frac{d}{dt} V_2 = V_1 - 1,7x + 0,9y \\ \frac{d}{dt} V_1 = -0,8x + 1,3y \end{cases} \quad (2.12)$$

W oparciu o tabele 2.3 i 2.4 wyznaczono warunki początkowe.

Tabela 2.3 Warunki początkowe V_i^x

	$x(0)$ 0.4	$\frac{d}{dt}x(0)$ 0,5	$\frac{d^2}{dt^2}x(0)$ 0	
				$b_3 = 0$
V_3^x				$b_2 = 1$
V_2^x				$b_1 = 1,7$
V_1^x				

$$V_3^x = 0,4 \cdot 0 = 0 \quad (2.13)$$

$$V_2^x = 0,5 \cdot 0 + 0,4 \cdot 1 = 0,4 \quad (2.14)$$

$$V_1^x = 0 \cdot 0 + 0,5 \cdot 1 + 0,4 \cdot 1,7 = 1,18 \quad (2.15)$$

Tabela 2.3 Warunki początkowe V_i^x

	$y(0)$	$\frac{d}{dt}y(0)$	$\frac{d^2}{dx}x(0)$	
	0,3	0,2	0,4	
V_3^x	x	x	x	$a_3 = 1$
V_2^x	x	x		$a_2 = 2,6$
V_1^x	x			$a_1 = 0,9$

$$V_3^y = 0,3 \cdot 1 = 0,3 \quad (2.13)$$

$$V_2^x = 0,2 \cdot 1 + 0,3 \cdot 2,6 = 0,98 \quad (2.14)$$

$$V_1^x = 0,4 \cdot 1 + 0,2 \cdot 2,6 + 0,3 \cdot 0,9 = 1,19 \quad (2.15)$$

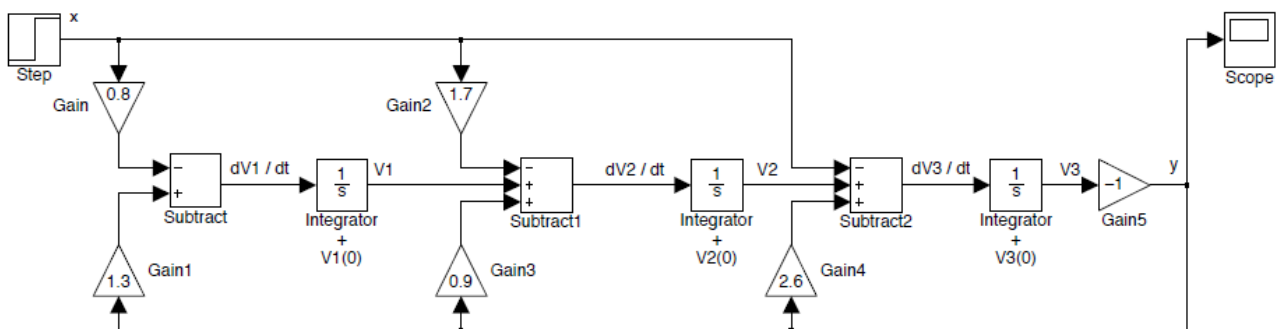
Podstawiając powyższe wartości do zależności 2.6 otrzymano:

$$V_3(0) = 0 - 0,3 = -0,3 \quad (2.16)$$

$$V_2(0) = 0,4 - 0,98 = -0,58 \quad (2.17)$$

$$V_1(0) = 1,18 - 1,19 = -0,01 \quad (2.18)$$

Na podstawie układu równań 2.12 sporządzono następujący schemat operacyjny w Simulink'u:



Rysunek 1.1. Schemat w Simulinku rozwiązujący równanie różniczkowe z przykładu 2 metodą kanoniczną.

Zadania do wykonania

Zadanie 1

Korzystając z metody zmiennej pomocniczej rozwiązać równanie różniczkowe:

$$2y''' + 0,2y' - 5y + 1 = 1,5x'' + 2x' - 0,4x$$

przy zerowych warunkach początkowych.

Zadanie 2

Korzystając z metody zmiennej pomocniczej rozwiązać równanie różniczkowe:

$$y''' + 3y'' + 4y' + 0,3y = 2x'' + 3x' - 0,4x$$

przy zerowych warunkach początkowych.

Zadanie 3

Korzystając z metody kanonicznej rozwiązać równanie różniczkowe z przykładu 1.

Zadanie 4

Narysować schemat operacyjny w Simulinku rozwiązujący metodą kanoniczną równanie różniczkowe:

$$y''' + 2y'' + 5y' + 6y = 3u'' + 6u$$

Przyjąć następujące warunki początkowe:

$$y(0) = 0,7 \quad y'(0) = 0,4 \quad y''(0) = 0,1 \quad u(0) = 0,2 \quad x'(0) = 0,6$$