
Politechnika Świętokrzyska

Wydział Elektrotechniki, Automatyki i Informatyki

Katedra Elektrotechniki Przemysłowej i Automatyki

Zakład Urządzeń i Systemów Automatyki

Komputerowa symulacja układów dynamicznych

Aproksymacja funkcji

Instrukcja laboratoryjna

(wersja robocza)

2017

Aproksymacja polega na przybliżaniu funkcji aproksymowanej $f(x)$ za pomocą innej funkcji (zwykle prostszej) zwanej funkcją aproksymującą $F(x)$. Aproksymację stosuje się gdy:

- funkcja aproksymowana jest skomplikowana – aproksymacja pozwala na przybliżenie skomplikowanej funkcji prostszą zależnością,
- nie znana jest postać funkcji aproksymowanej, a jedynie jej wartości w określonych punktach np. uzyskanych w wyniku pomiaru.

Funkcja aproksymująca $F(x)$ wyrażona jest przy pomocy przyjętego wyrażenia algebraicznego np. wielomianu, funkcji trygonometrycznej, funkcji wymiernej. Najczęściej jest to tzw. wielomian uogólniony $Q(x)$ będący kombinacją poszczególnych funkcji bazowych $q_i(x)$.

$$Q_n(x) = \sum_{j=0}^n a_j q_j(x) \quad (1)$$

Jako funkcje bazowe stosowane mogą być:

- jednomiany np. 1, x , x^4 ,
- funkcje trygonometryczne np. $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\cos(2x)$,
- wielomiany ortogonalne.

Funkcja otrzymana w wyniku aproksymacji nie musi przechodzić przez wszystkie punkty określone funkcją aproksymowaną. Otrzymana krzywa przebiega tak aby jej odchylenie od punktów funkcji aproksymowanej było minimalne.

Przykład 1

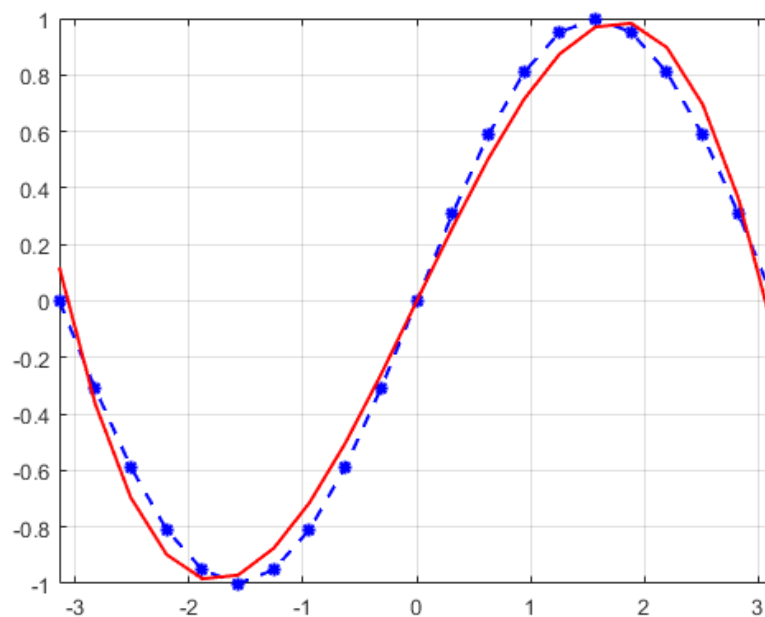
Dokonać aproksymacji funkcji $Y = \sin(t)$. Jako funkcję aproksymującą przyjąć wielomian $y_a = a_1 t^3 + a_2 t$.

Listing 1. Zawartość skryptu realizującego zadanie z przykładu 1

```
clc; clear;
t = -pi : pi/10 : pi;
Y = sin(t); % funkcja aproksymowana Y = f(t)
X = [t.^3; t]; % y = a1*t^3 + a2*t
A = Y / X; % współczynniki funkcji aproksymującej
Ya = A*X; % wartości funkcji aproksymującej
figure(1); plot(t,Y,'b*--', t,Ya,'r', 'Linewidth', 1.5);
grid('on'); xlim([-pi pi])
```

Jak widać zadanie aproksymacji sprowadza się do wyznaczenia współczynników wielomianu aproksymującego – w tym przypadku a_1 oraz a_2 . Zadanie aproksymacji sprowadza się do rozwiązania liniowego układu równań $\mathbf{Y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, gdzie :

- \mathbf{Y} – znany wektor wartości funkcji aproksymowanej,
- \mathbf{X} – znana macierz której kolumny definiowane są jako dziedziny funkcji aproksymowanej,
- \mathbf{A} – poszukiwany wektor współczynników funkcji aproksymującej.



Rysunek 1. Wynik działania skryptu z listingu 1

W przypadku zastosowania innej funkcji aproksymującej macierz \mathbf{X} należy odpowiednio zmodyfikować. Przykłady przedstawiono w tabeli poniżej.

Tabela 1. Zawartość macierzy \mathbf{Y} dla przykładowych funkcji aproksymujących

Funkcja aproksymująca	Macierz \mathbf{X}
$y = a_1 \cdot t + a_0$	$\mathbf{X}=[t; t.^0]$
$y = a_2 \cdot t^2 + a_1 \cdot t + a_0$	$\mathbf{X}=[t.^2; t; t.^0]$
$y = a_3 \cdot t^3 + a_2 \cdot t^2 + a_1 \cdot t + a_0$	$\mathbf{X}=[t.^3; t.^2; t; t.^0]$
$y = a_2 \cdot t^5 + a_1 \cdot t^3 + a_0 \cdot t$	$\mathbf{X}=[t.^5; t.^3; t]$

Przykład 2

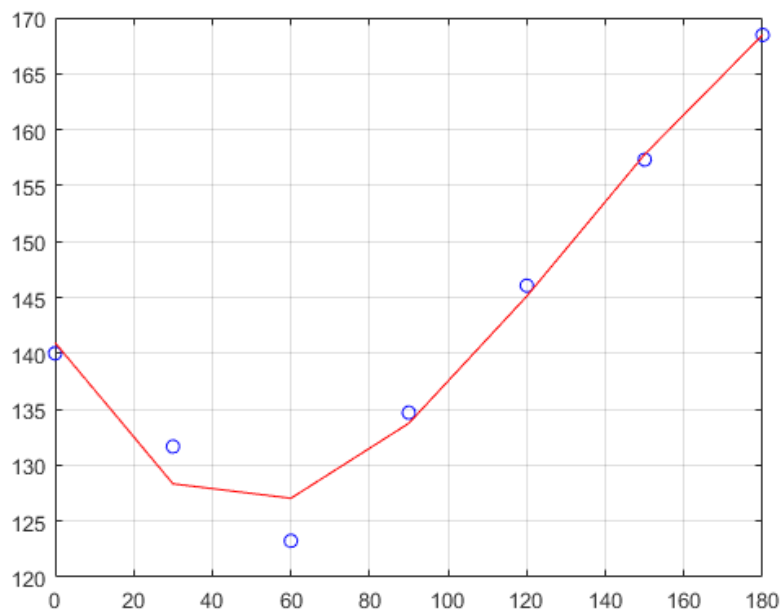
Napisać skrypt który zrealizuje algorytm aproksymacji danych tabelarycznych.

x	0	30	60	90	120	150	180
Y(x)	140.00	131.67	123.24	134.70	146.06	157.32	168.47

Jako funkcje aproksymującą przyjąć $a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$.

Listing 2. Zawartość skryptu realizującego zadanie z przykładu 2

```
clc; clear;
Y = [140 131.67 123.24 134.70 146.06 157.32 168.47]; % funkcja aproksymowana
x = [0 30 60 90 120 150 180]; % punkty pomiarowe
X=[x.^3; x.^2; x; x.^0]; %funkcja aproksymująca
A = Y / X; % współczynniki funkcji aproksymującej
Ya = A*X; % wartości funkcji aproksymującej
figure(1); plot(x,Y, 'bo', x,Ya, 'r');
grid('on');
```



Rysunek 2. Wynik działania skryptu z listingu 2

Do wyznaczenia współczynników wielomianu aproksymującego wykorzystać można wbudowaną w środowisko Matlab funkcję `polyfit()`. Funkcja ta zwraca współczynniki wielomianu o zadanym stopniu:

$$p = \text{polyfit}(x, y, n)$$

gdzie:

- p – wektor współczynników poszukiwanego wielomianu,

- x – wektor wartości zmiennej niezależnej,
- y – wektor wartości zmiennej zależnej,
- n – stopień wielomianu aproksymującego.

Do wyznaczenia wartości wielomianu w dowolnych punktach można wykorzystać funkcję `polyval()`.

```
y_p = polyval(p,x1)
```

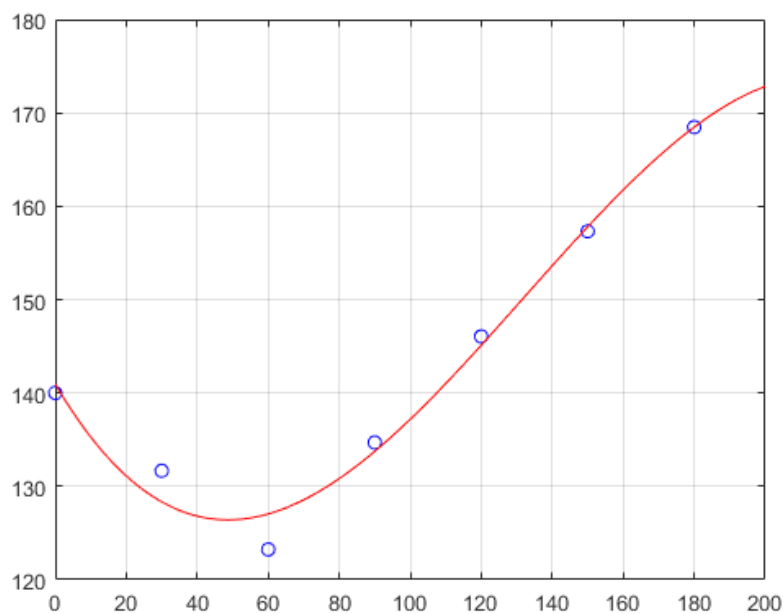
gdzie:

- y_p – wektor wartości wielomianu w punktach zdefiniowanych w $x1$
- $x1$ – wektor dowolnych punktów.

Poniżej przedstawiono aproksymację danych tabelarycznych z przykładu 2 wielomianem trzeciego stopnia z wykorzystaniem wyżej przedstawionych funkcji.

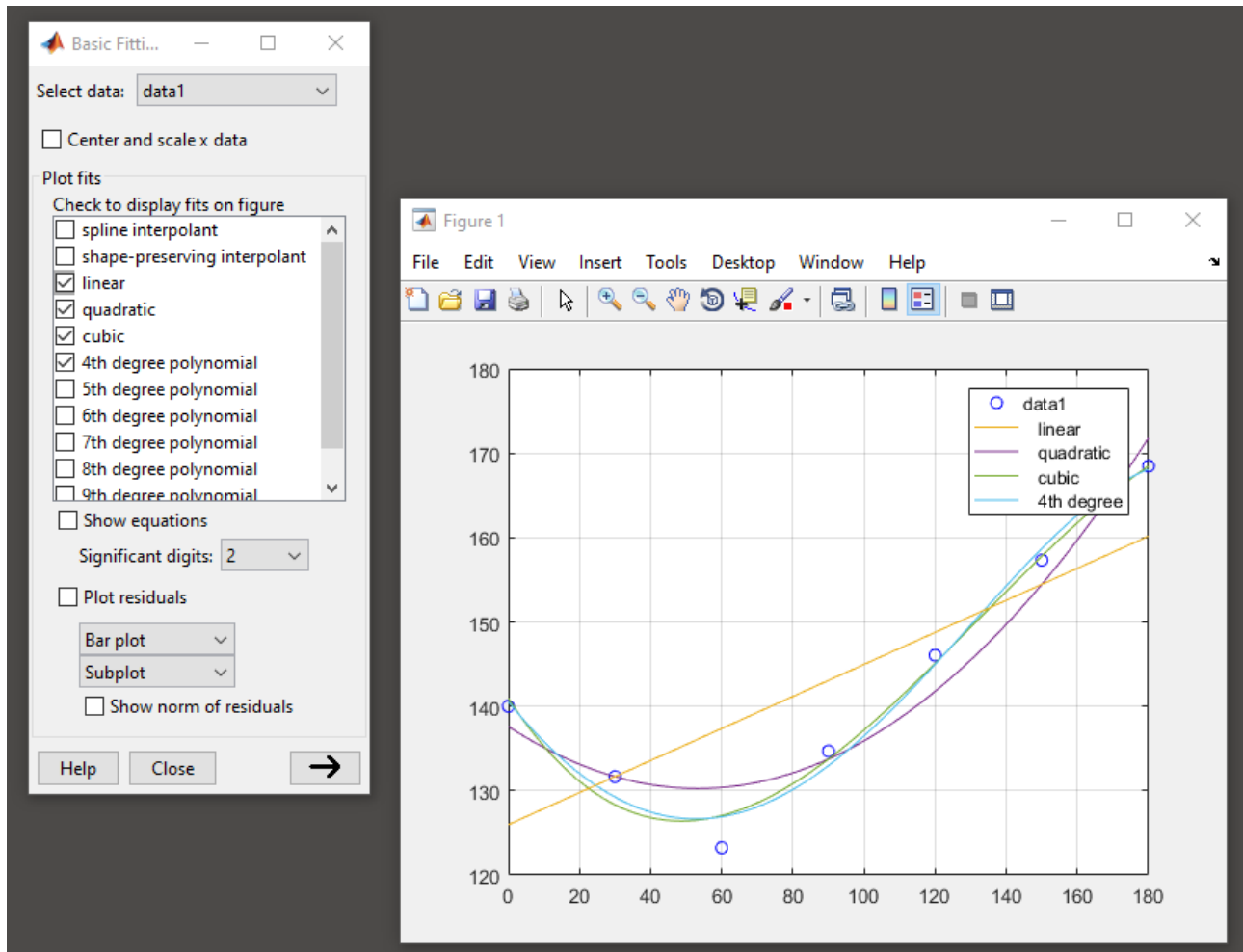
Listing 3. Przykład wykorzystania funkcji `polyfit()` i `polyval()`

```
clc; clear;  
Y = [140 131.67 123.24 134.70 146.06 157.32 168.47]; % funkcja aproksymowana  
x = [0 30 60 90 120 150 180]; % punkty pomiarowe  
x1=0:1:200; %wektor wartości naturalnych z przedziału <0,200>  
p = polyfit(x,Y,3); %wyznaczenie współczynników wielomianu  
y_p = polyval(p,x1) %wyznaczenie wartości wielomianu w punktach x1  
figure(1); plot(x,Y,'bo', x1,y_p,'r');  
grid('on');
```



Rysunek 3. Wynik działania skryptu z listingu 3

W środowisku Matlab do aproksymacji wykorzystać można również narzędzie *Basic Fitting*. W tym celu należy narysować wykres funkcji aproksymowanej, a następnie z menu okna rysunkowego wybrać: *Tools* → *Basic Fitting*. Okno interfejsu Basic Fitting przedstawiono na rysunku poniżej. Pozwala on dokonywać różnego rodzaju aproksymacji funkcji.



Rysunek 4. Okno interfejsu Basic Fitting

Zadania do wykonania

Zadanie 1

Napisać skrypt który dokona aproksymacji danych tabelarycznych zawartych w tabeli. Jako funkcje bazowe wielomianu aproksymującego przyjąć: $q_0 = 1$, $q_1 = \sin(x)$. Znaleźć wartość funkcji w punktach: $x_0 = \pi/2$, $x_1 = \pi$

x	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
Y(x)	1	-4	-7	-2	2	1

Zadanie 2

Dokonać aproksymacji funkcji $y = \sin(2t) + e^{3t} + 4t^3$. Jako funkcje bazowe wielomianu aproksymującego przyjąć: $q_0 = \sin(t)$, $q_1 = t^2$. Obie funkcje przedstawić na wykresie dla $t \in \langle 0, 10 \rangle$.

Zadanie 3

Dokonać aproksymacji danych tabelarycznych z zadania 1 przy użyciu funkcji `polyfit()` i `polyval()`.

Zadanie 4

Dokonać aproksymacji funkcji z zadania 2 z użyciem interfejsu Basic Fitting. Wykres powinien zawierać wynik aproksymacji wielomianem drugiego, trzeciego i piątego stopnia.